

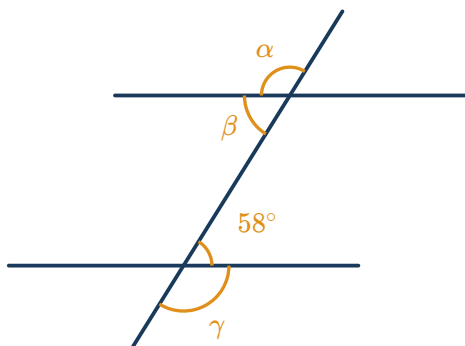


Klucz nauczyciela · Sprawdzian: Figury na płaszczyźnie

klasa 8 · grupa A · dla nauczyciela · 30 pkt + 2 pkt dodatkowe · 45 minut

Zadanie 1 Proste poziome są równoległe. Oblicz miary kątów oznaczonych literami.

/ 3 pkt



$$\alpha = \underline{122}^{\circ}$$

$$\beta = \underline{58}^{\circ}$$

$$\gamma = \underline{122}^{\circ}$$

Odpowiedź: $\alpha = 122^{\circ}$, $\beta = 58^{\circ}$, $\gamma = 122^{\circ}$

Rozwiązanie: Kąt β i kąt 58° są naprzemianległe (proste są równoległe), więc $\beta = 58^{\circ}$. Kąt α jest przyległy do kąta β : $\alpha = 180^{\circ} - 58^{\circ} = 122^{\circ}$. Kąt γ jest przyległy do kąta 58° : $\gamma = 180^{\circ} - 58^{\circ} = 122^{\circ}$.

Punktacja:

1. **1 pkt** — $\alpha = 122^{\circ}$
2. **1 pkt** — $\beta = 58^{\circ}$
3. **1 pkt** — $\gamma = 122^{\circ}$

Zadanie 2 Dwa kąty trójkąta mają miary 52° i 41° . Oblicz miarę trzeciego kąta i określ rodzaj trójkąta ze względu na kąty.

/ 2 pkt

Odp. 87° , ostrokątny

Odpowiedź: 87° ; trójkąt ostrokątny

Rozwiązanie: $180^{\circ} - 52^{\circ} - 41^{\circ} = 87^{\circ}$. Wszystkie kąty (52° , 41° , 87°) są ostre, więc trójkąt jest ostrokątny.

Punktacja:

1. **1 pkt** — trzeci kąt 87°
2. **1 pkt** — rodzaj: ostrokątny (uznaj także przy błędzie rachunkowym, jeśli wniosek wynika z otrzymanego kąta)

Zadanie 3 Jeden z kątów trójkąta równoramiennego ma 72° . Jakie miary mogą mieć pozostałe dwa kąty? Podaj wszystkie możliwości.

/ 2 pkt

Odp. 72° i 36° lub 54° i 54°

Odpowiedź: 72° i 36° albo 54° i 54°

Rozwiązanie: Przypadek 1: 72° to kąt przy podstawie. Drugi kąt przy podstawie też ma 72° , a kąt między ramionami $180^{\circ} - 2 \cdot 72^{\circ} = 36^{\circ}$.

Przypadek 2: 72° to kąt między ramionami. Kąty przy podstawie: $(180^{\circ} - 72^{\circ}) : 2 = 54^{\circ}$.

Punktacja:

1. **1 pkt** — przypadek: 72° i 36°
2. **1 pkt** — przypadek: 54° i 54°





Zadanie 4 Jeden kąt ostry trójkąta prostokątnego jest o 24° większy od drugiego. Oblicz miary kątów ostrych.

/ 2 pkt

Odp. 33° i 57°

Odpowiedź: 33° i 57°

Rozwiązanie: Kąty ostre trójkąta prostokątnego dają razem 90° . Niech mniejszy kąt to x : $x + (x + 24^\circ) = 90^\circ$, $2x = 66^\circ$, $x = 33^\circ$; drugi kąt $33^\circ + 24^\circ = 57^\circ$.

Punktacja:

1. **1 pkt** — równanie $x + x + 24 = 90$ (lub równoważne rozumowanie)
2. **1 pkt** — oba kąty: 33° i 57°

Zadanie 5 Jeden kąt równoległoboku jest o 28° większy od drugiego. Oblicz miary kątów równoległoboku.

/ 2 pkt

Odp. 76° i 104°

Odpowiedź: 76° i 104° (po dwa kąty)

Rozwiązanie: Sąsiednie kąty równoległoboku dają razem 180° : $x + (x + 28^\circ) = 180^\circ$, $2x = 152^\circ$, $x = 76^\circ$; drugi kąt 104° . Równoległobok ma dwa kąty 76° i dwa kąty 104° .

Punktacja:

1. **1 pkt** — zauważenie, że sąsiednie kąty dają 180° (równanie)
2. **1 pkt** — oba kąty: 76° i 104°

Zadanie 6 Oceń prawdziwość twierdzenia. Otocz P, jeśli jest prawdziwe, albo F, jeśli jest fałszywe.

/ 2 pkt

- a) Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 12, to jest podzielna przez 4. **(P)** / F
- b) Jeżeli liczba naturalna jest podzielna przez 2 i przez 5, to jest podzielna przez 20. **P** / **(F)**

Odpowiedź: a) P; b) F

Rozwiązanie: a) $12 = 3 \cdot 4$, więc każda wielokrotność 12 jest wielokrotnością 4 — **P**.

b) Liczba podzielna przez 2 i przez 5 jest podzielna przez 10, ale nie musi przez 20, np. 10 lub 30 — **F**.

Punktacja:

1. **1 pkt** — a) P
2. **1 pkt** — b) F

Zadanie 7 Trójkąt równoramienny ma obwód 34 cm, a jeden z jego boków ma 10 cm. Jakie długości mogą mieć pozostałe dwa boki? Podaj wszystkie możliwości.

/ 2 pkt

Odp. 12 cm i 12 cm lub 10 cm i 14 cm

Odpowiedź: 12 cm i 12 cm albo 10 cm i 14 cm

Rozwiązanie: Przypadek 1: 10 cm to podstawa. Ramiona: $(34 - 10) : 2 = 12$ cm. Trójkąt 10, 12, 12 istnieje ($12 + 12 > 10$).

Przypadek 2: 10 cm to ramię. Drugie ramię 10 cm, podstawa $34 - 2 \cdot 10 = 14$ cm. Trójkąt 10, 10, 14 istnieje ($10 + 10 > 14$).

Punktacja:

1. **1 pkt** — rozpatrzenie obu przypadków (bok 10 cm jako podstawa i jako ramię)
2. **1 pkt** — sprawdzenie nierówności trójkąta i obie odpowiedzi



Zadanie 8 Oblicz sumę kątów wewnętrznych wielokąta o 14 bokach.

/ 2 pkt

Odp. 2160°

Odpowiedź: 2160°

Rozwiązanie: Suma kątów wewnętrznych n -kąta: $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Dla $n = 14$: $12 \cdot 180^\circ = 2160^\circ$.

Punktacja:

1. **1 pkt** — wzór $(n - 2) \cdot 180^\circ$

2. **1 pkt** — wynik 2160°

Zadanie 9 Czy trójkąty na pewno są przystające? Jeśli tak, podaj cechę (bbb, bkb, kbk).

/ 2 pkt

a) $\triangle ABC$: $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 11$ cm; $\triangle PQR$: $PQ = 80$ mm, $QR = 110$ mm, $PR = 60$ mm

Odp. TAK, bbb

b) $\triangle ABC$: $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm, $\sphericalangle B = 40^\circ$; $\triangle KLM$: $KL = 7$ cm, $KM = 5$ cm, $\sphericalangle L = 40^\circ$

Odp. NIE

Odpowiedź: a) TAK, bbb; b) NIE

Rozwiązanie: a) 80 mm = 8 cm, 110 mm = 11 cm, 60 mm = 6 cm — oba trójkąty mają boki 6 cm, 8 cm, 11 cm: **TAK, cecha bbb**.

b) Kąt 40° nie leży między danymi bokami (leży naprzeciw boku 5 cm). Dwa boki i kąt nie między nimi nie wyznaczają trójkąta: z takich danych da się zbudować dwa różne trójkąty (np. $BC \approx 7,5$ cm albo $BC \approx 3,2$ cm) — **NIE**.

Punktacja:

1. **1 pkt** — a) TAK z cechą bbb (samo „TAK” — 0 pkt)

2. **1 pkt** — b) NIE

Zadanie 10 Trójkąty ABC i KLM są przystające (A odpowiada K , B — L , C — M). Wiadomo, że $BC = 11$ cm, $\sphericalangle A = 49^\circ$, $\sphericalangle B = 83^\circ$. Podaj: długość boku LM , miarę kąta M .

/ 2 pkt

Odp. $LM = 11$ cm, $\sphericalangle M = 48^\circ$

Odpowiedź: $LM = 11$ cm; $\sphericalangle M = 48^\circ$

Rozwiązanie: Bok LM odpowiada bokowi BC , więc $LM = 11$ cm. Kąt M odpowiada kątowi C :
 $\sphericalangle C = 180^\circ - 49^\circ - 83^\circ = 48^\circ$.

Punktacja:

1. **1 pkt** — $LM = 11$ cm

2. **1 pkt** — $\sphericalangle M = 48^\circ$

Zadanie 11 Oblicz miarę kąta wewnętrznego wielokąta foremnego o 30 bokach.

/ 2 pkt

Odp. 168°

Odpowiedź: 168°

Rozwiązanie: Suma kątów: $(30 - 2) \cdot 180^\circ = 5040^\circ$; jeden kąt: $5040^\circ : 30 = 168^\circ$. (Inaczej: kąt zewnętrzny $360^\circ : 30 = 12^\circ$, wewnętrzny $180^\circ - 12^\circ = 168^\circ$.)

Punktacja:

1. **1 pkt** — metoda: $(n - 2) \cdot 180^\circ : n$ albo kąt zewnętrzny $360^\circ : n$

2. **1 pkt** — wynik 168°



Zadanie 12 Obwód sześciokąta foremnego wynosi 66 cm. Oblicz długość jego krótszej przekątnej.

/ 2 pkt

Odp. $11\sqrt{3}$ cm

Odpowiedź: $11\sqrt{3}$ cm

Rozwiązanie: Bok: $66 : 6 = 11$ cm. Krótsza przekątna jest równa dwóm wysokościami trójkąta równobocznego o boku

$$11 \text{ cm}; 2 \cdot \frac{11\sqrt{3}}{2} = 11\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Punktacja:

1. **1 pkt** — bok 11 cm i zależność: krótsza przekątna $= a\sqrt{3}$ (dwie wysokości trójkąta równobocznego)
2. **1 pkt** — wynik $11\sqrt{3}$ cm

Zadanie 13 Odcinki w układzie współrzędnych.

/ 3 pkt

a) Oblicz długość odcinka AB , gdzie $A = (-2, 1)$ i $B = (4, -5)$.

Odp. $6\sqrt{2}$

b) Wyznacz współrzędne środka odcinka AB , gdzie $A = (-5, 3)$ i $B = (2, -4)$.

Odp. $(-1,5; -0,5)$

Odpowiedź: a) $6\sqrt{2}$; b) $(-1,5; -0,5)$

Rozwiązanie: a) $|AB| = \sqrt{(4 - (-2))^2 + (-5 - 1)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

$$b) S = \left(\frac{-5 + 2}{2}; \frac{3 + (-4)}{2} \right) = (-1,5; -0,5).$$

Punktacja:

1. **1 pkt** — a) poprawne podstawienie różnic współrzędnych do twierdzenia Pitagorasa
2. **1 pkt** — a) wynik $6\sqrt{2}$ (także $\sqrt{72}$)
3. **1 pkt** — b) $(-1,5; -0,5)$

Zadanie 14 Czy trójkąt o bokach 7 cm, 24 cm i 25 cm jest prostokątny? Uzasadnij.

/ 2 pkt

Odp. tak

Odpowiedź: tak

Rozwiązanie: $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt jest prostokątny.

Punktacja:

1. **1 pkt** — porównanie $7^2 + 24^2$ z 25^2
2. **1 pkt** — odpowiedź „tak” wynikająca z porównania

★ **Zadanie 15** Zadanie dodatkowe (+2 pkt). Okrąg o środku O ma promień 17 cm, a cięciwa KL ma długość 30 cm. Oblicz odległość środka okręgu od tej cięciwy.

+2 pkt

Odp. 8 cm

Odpowiedź: 8 cm

Rozwiązanie: Odcinek z O prostopadły do cięciwy dzieli ją na połowy po 15 cm. Trójkąt: przeciwprostokątna $OK = 17$ cm, przyprostokątna 15 cm: $d = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8$ cm.

Punktacja:

1. **1 pkt** — trójkąt prostokątny: promień, połowa cięciwy (15 cm), szukana odległość
2. **1 pkt** — wynik 8 cm



Zasady przyznawania punktów

- Zadania otwarte i z lukami: punkty według kryteriów podanych przy zadaniu. Każdy poprawny sposób rozwiązania jest akceptowany, także inny niż w kluczu.
- Przy poprawnej metodzie i błędzie rachunkowym uczeń traci tylko punkt za wynik końcowy; sam wynik bez wymaganego zapisu obliczeń daje najwyżej punkt za odpowiedź, jeśli kryteria tak stanowią.
- Zadanie dodatkowe (+2 pkt) nie wlicza się do sumy 30 pkt; może podnieść ocenę zgodnie z zasadami szkoły.
- W zadaniach otwartych uznaj każdą poprawną metodę prowadzącą do wyniku. Wynik z pierwiastkiem może być podany w postaci nieuproszczonej (np. $\sqrt{72}$ zamiast $6\sqrt{2}$).
- Przy pytaniach o przystawanie odpowiedź „TAK” bez podanej (poprawnej) cechy — 0 pkt.
- W zadaniach z kilkoma możliwościami (trójkąt równoramienny) odpowiedź musi zawierać wszystkie możliwości i odrzucać te, które nie dają trójkąta.

Proponowana skala ocen (30 pkt)

30–27 pkt: bardzo dobry · 26–23 pkt: dobry · 22–17 pkt: dostateczny · 16–12 pkt: dopuszczający · 11–0 pkt: niedostateczny

Progi orientacyjne: ok. 90% / 75% / 55% / 40%. Dostosuj je do wewnętrznych zasad oceniania.